6. Нахапетян Б. С., Хачатрян Л. А. *Вероятностные методы в дискретных задачах.* – Ереван: Гитутюн, 2016. – 395 с.

ON SOME FUNCTIONALS ON THE SPACE OF CONFIGURATIONS ASSOCIATED WITH THE SPECIFICATIONS OF RANDOM FIELDS

B.S. Nahapetyan, L.A. Khachatryan

*We show that the problem of description of random fields in terms of a subsystem of a specification, consisting only of one-point probability distributions (the Dobrushin problem), reduces to the problem of extension of functionals defined on pairs of configurations that differ only in one point to the whole space of pairs of configurations. Such continuation is possible under certain symmetry conditions of the functional.*

Keywords: specification, random field.

УДК 514.822

## СВОЙСТВА СФЕРИЧЕСКОГО МОДУЛЯ СЕМЕЙСТВА КРИВЫХ

А. Новик[1], А.Н. Малютина[2]

1 *novik.anastasiia@mail.ru*; Томский государственный университет, Механико-математический факультет

2 *nmd@math.tsu.ru*; Томский государственный университет, Механико-математический факультет

*Работа посвящена изучению свойств и вычислению сферического модуля семейства кривых, а также искажению его при отображениях с s-усредненной характеристикой [1].*

**Ключевые слова**: пространственный модуль, пространственное отображение, модуль семейства кривых.

Нахождение экстремальных метрик и модулей семейств кривых даже на плоскости нередко связано с трудностями т.к приводящие к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных. Поэтому для отыскания экстремальной метрики не существует универсального метода. До сих пор известно мало пространственных задач, для которых модули найдены. Существенный вклад в развитию теории модулей внесли В.А. Зорич, И.П. Митюк, В.М. Миклюков, Г.Д. Суворов, А.В. Сычев, Б. Фюгледе, Дж. Дженкинс, Ф. Геринг, Ю.Г. Решетняк, O. Martio, S. Rickman, Ju. Väisälä и др.

**Определение 1.** *Пусть* $\Gamma$ *– некоторое семейство кривых в* $\bar{R}^n$. *Борелевскую функцию* $p$: $R^n \to [0;\infty]$ *назовем допустимой метрикой семейства* $\Gamma$*, если* $\int_\gamma p\,dl_x \geq 1$ *для каждой кривой* $\gamma \in \Gamma$*, где* $dl_x = \frac{dl}{1+|x|^2}$ *. В дальнейшем запись* $p \wedge \Gamma$ *будет означать, что* $p$ *есть допустимая метрика семейства* $\Gamma$.

**Определение 2.** *Сферический модуль семейства Г определим по формуле* $M_\alpha(\Gamma) = \inf \int_{R^n} p^\alpha d\sigma_x$*, где* $d\sigma_x = \frac{dx}{(1+|x|^2)^n}$ *и* $\inf$ *берется над классом всевозможных метрик* $p$.

Заметим, что $n$-мерный интеграл в определении модуля может быть сужен до наименьшего борелевского множества $E$, содержащего семейство $\Gamma$, так как inf в этом определении достигается на метриках, обращающихся в нуль на $CE$. Очевидно, $0 \le M(\Gamma) \le \infty$. Если класс метрик $p \wedge \Gamma$ пуст, то полагаем $M(\Gamma) = \infty$.

**Определение 3.** *Семейство* $\Gamma$ *назовем исключительным, если* $M(\Gamma) = 0$. *Будем говорить, что некоторое свойство имеет место для почти всех кривых семейства* $\Gamma$*, если подсемейство* $\Gamma$*, на котором оно не имеет места, является исключительным.*

**Теорема 1.** *Семейство всевозможных неспрямляемых кривых* $\gamma$ *в* $\bar{R}^n$ *исключительно.*

Доказательство. Пусть $\Gamma_\infty$ – семейство всевозожных неспрямляемых кривых $\gamma$ в $\bar{R}^n$. Введем функцию

$$p_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|\ln|x|}, |x| \ge 2, \\ 1, |x| < 2. \end{cases} \tag{1}$$

Для нее

$$\int_{R^n} p_0^n dl_x = 2^n\Omega_n + \frac{\Omega_{n-1}}{(n-1)\ln^{n-1}2} < \infty, \quad \int_{R^n} p_0^n d\Sigma_x = 2^n\Omega_n + \frac{\Omega_{n-1}}{(n-1)\ln^{n-1}2} < \infty,$$

и кроме того, $\int_\gamma p_0 dl_x = 0$ для каждой кривой $\gamma \in \Gamma$. В самом деле, если кривая $\gamma$ ограничена, то $p_0(x) \ge a > 0$ на $\gamma$ и утверждение очевидно. Если же $\gamma$ неограничена, то, выбрав точку $x$ на $\gamma$ с $|x| \ge 2$, имеем $\int_\gamma p_0 dl_x \ge \int\limits_{|x|}^{\infty} \frac{dr}{r\ln r} = \infty$. Таким образом, функция $p_0$ является допустимой метрикой, и следовательно семейство $\Gamma_\infty$ является исключительным. Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Семейство* $\Gamma$ *всевозможных кривых, проходящих через произвольную точку* $P$ *пространства* $\bar{R}^n$*, исключительно.*

Пусть $f : \bar{R}^n \to \bar{R}^n$ – преобразование Мебиуса, т. е. отображение, представимое в виде суперпозиции конечного числа следующих известных элементарных преобразований: 1) параллельного переноса $f(x) = x + a$, $a \in R^n$; 2) гомотетии $f(x) = rx$, $r > 0$; 3) ортогонального преобразования $f(x)$ вида : $f(x)$ – линейное преобразование и $|f(x)| = |x|$ для всех $x \in R^n$; 4) инверсии относительно сферы $S^{(n-1)}(a,r) : f(x) = a + \frac{r^2(x-a)}{|x-a|^2}$.

**Определение 4.** *Если для некоторой метрики* $p_0 \wedge \Gamma$ *имеем* $M_\alpha(\Gamma) = \int_{R^n} p_0^\alpha d\Sigma_x$*, то метрику* $p_0$ *назовем экстремальной.*

Укажем основные свойства модулей.

1. Если $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, то $M_\alpha(\Gamma_1) \le M_\alpha(\Gamma_2)$.
2. $M_\alpha(\cup_{i=1}^\infty \Gamma_i) \le \sum_{i=1}^\infty M_\alpha(\Gamma_i)$ – свойство полуаддитивности.

**Теорема 3.** *Экстремальная метрика семейства* $\Gamma$ *определяется единственным образом (с точностью до значений на множестве n-мерной лебеговой меры нуль).*

Доказательство. Пусть $p_{01}$ и $p_{02}$ – две экстремальные метрики семейства $\Gamma$. Введем функцию $p = \frac{p_{01}+p_{02}}{2}$. Докажем, что $p \wedge \Gamma$ допустимая мера. Для каждой кривой $\gamma \in \Gamma$ имеем $\int_\gamma p_{01} dl_x \ge 1$ и $\int_\gamma p_{02} dl_x \ge 1$, тогда $\int_\gamma p dl_x = \frac{1}{2}\int_\gamma p_{01} dl_x + \frac{1}{2}\int_\gamma p_{02} dl_x \ge 1$.

С другой стороны, так как функция $(\frac{a^t+b^t}{2})^{\frac{1}{t}}$, $a>0$, $b>0$, является возрастающей функцией от $t$, $t>0$, выполняется неравенство $\frac{p_{01}+p_{02}}{2} \le (\frac{p_{01}^\alpha+p_{02}^\alpha}{2})^{\frac{1}{\alpha}}$, причем знак равенства имеет место в тех и только тех точках $x$, в которых $p_{01}(x)=p_{02}(x)$. Отсюда следует, что $\int_{R^n} p^\alpha d\Sigma_x = \int_{R^n} (\frac{p_{01}+p_{02}}{2})^\alpha d\Sigma_x \le \frac{1}{2}\int_{R^n} p_{01}^\alpha d\Sigma_x + \int_{R^n} p_{02}^\alpha d\Sigma_x = M_\alpha(\Gamma)$, а так как, по определению модуля, знак неравенства здесь не может иметь места, то почти всюду в $\frac{p_{01}+p_{02}}{2} \le (\frac{p_{01}^\alpha+p_{02}^\alpha}{2})^{\frac{1}{\alpha}}$ имеет место знак равенства. Следовательно, $p_{01}=p_{02}$ почти всюду в $R^n$.

**Пример 1.** *Пусть $D$ – прямоугольный параллелепипед $\{x: 0<x_1<a, 0<x_2<b, 0<x_3<c\}$, $\Gamma$ – семейство всевозможных кривых $\gamma$, соединяющих в $D$ основания $x_3=0$ и $x_3=c$. Тогда $M(\Gamma)=ab/C^2$.*

**Пример 2.** *Пусть $E$ – измеримое множество в $R^{n-1}$, $D$ – цилиндр $\{x\in R^n : (x_1,...,x_{n-1})\in E, 0<x_n<H\}$ и $\Gamma$ – семейство всевозможных кривых, соединяющих основания цилиндра $E$ и $F=E+He_n$. Тогда $M(\Gamma)=\frac{m_{n-1}(E)}{H^{n-1}}=\frac{m_n(D)}{H^n}$.*

**Пример 3.** *Пусть $D$ есть цилиндрическое кольцо $\{x=(r,\phi,x_3): 0<\phi\le 2\pi, r_1<r<r_2, 0<x_3<H\}$, где $(r,\phi,x_3)$ – цилиндрические координаты в $R^3$, и $\Gamma$ – семейство всевозможных кривых $\gamma$, соединяющих в $D$ внутреннюю и внешнюю боковые поверхности $D$. Тогда $M(\Gamma)=\frac{\pi H}{2(\sqrt{r_2}-\sqrt{r_1})^2}$. В самом деле, функция*

$$p_0=\begin{cases}\frac{1+|x|^2}{2(\sqrt{r_2}-\sqrt{r_1})\sqrt{r}}, x\in D\\ 0, x\notin D\end{cases} \tag{2}$$

*является допустимой и экстремальной метрикой для семейства $\Gamma$: $\int p_0 \frac{dl}{2(\sqrt{r_2}-\sqrt{r_1})\sqrt{r}} = \frac{1}{2(\sqrt{r_2-\sqrt{r_1}})}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{\sqrt{r}}=1$ .*

Наряду с модулем семейства кривых $M_\alpha(\Gamma)$ иногда рассматривается величина $\lambda(\Gamma)=M_\alpha(\Gamma)^{\frac{1}{1-n}}$, называемая экстремальной длиной семейства $\Gamma$ [3]. Заметим, что преобразование Мебиуса всегда можно представить в виде одной из двух следующих форм : $f(x)=rT(x)+a$ или $f(x)=I(rT(x)+a)$, где $r>0$, $a\in R^n$, $T$ – ортогональное отображение, $I$-инверсия. Первый случай имеет место, когда $f(\infty)=\infty$, и тогда $f(x)$ называется преобразованием подобия.

**Теорема 4.** *Если $f:\bar{R}^n\to\bar{R}^n$ – преобразование Мебиуса, то $M_\alpha(f(\Gamma))=M_\alpha(\Gamma)$ для всякого семейства кривых $\Gamma$ из $\bar{R}^n$.*

## Литература

1. Елизарова М.А., Малютина А.Н. *Отображения с s-усредненной характеристикой. Определение и свойства.* – LAMBERT Academic Publishing, 2013. – 121 с.

2. Сычев А.В. *Модули и пространственные квазиконформные отображения.* – Новосибирск: Наука, 1983.

3. Кановей В.Г., Любецкий В.А. *Современная теория множеств: борелевские и проективные множества.* – М.: МЦНМО, 2010.

PROPERTIES OF THE SPHERICAL MODULE OF A FAMILY OF CURVES

A. Novik, A.N. Malyutina

*The paper is devoted to the study of properties and calculation of the spherical module of a family of curves, as well as to module's distorting under mappings with s-averaged characteristic.*

Keywords: space module, space mapping, module of a family of curves.

УДК 517.982

## ОБОБЩЕНИЕ $L_1$-ПОЛУНОРМ

Ан.Ан. Новиков[1], З.Ш. Холматова[2]

1 *a.hobukob@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

2 *zamira.kholmatova@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

*В работе рассматривается отображение, являющееся обобщением $L_1$-полунорм, ассоциированных с операторами, присоединенными к алгебре фон Неймана, и весами, определенными на алгебре фон Неймана.*

**Ключевые слова**: упорядоченное векторное пространство, порядок, некоммутативное интегрирование, двойственность.

Пусть $K$ – порождающий конус в векторном пространстве $E$. Элемент $f$ векторного пространства $E$ будем называть положительным и писать $f \geq \vec{0}$, если $f \in K$. Также будем писать $f \geq g$, если $f - g \in K$.

Пусть частично упорядоченные векторные пространства $E$ и $F$ (с конусами положительных элементов $E^+$ и $F^+$ соответственно) находятся в двойственности $\langle E, F \rangle$ и согласованы в смысле порядка, т. е. если $x \in E^+, f \in F^+$, то $\langle x, f \rangle \geq 0$.

Определим

$$p(x,f) := \inf\left\{ \langle x_1 + x_2, f_1 + f_2 \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} x = x_1 - x_2,\ x_1, x_2 \in E^+ \\ f = f_1 - f_2,\ f_1, f_2 \in F^+ \end{array} \right\}.$$

Очевидно, что для любых $x \in E$, $f \in F$ выполняется неравенство $p(x,f) \geq 0$.

**Предложение 1.** *Для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x \in E$, $f \in F$ выполняется равенство*

$$p(\lambda x, \mu f) = |\lambda||\mu| p(x,f).$$

В случае, если зафиксировать один из аргументов положительным, то относительно другого аргумента отображения $p(x,\cdot)$ и $p(\cdot,f)$ становятся полунормами [1–4].

**Предложение 2.** *Если $x \in E^+$, то*

$$p(x,f) = \inf\{(f_1 + f_2)(x) \mid f = f_1 - f_2\} \quad \text{для любого } f \in F.$$

*Аналогично, если $f \in F^+$, то $p(x,f) = \inf\{f(x_1) + f(x_2) \mid x = x_1 - x_2\}$ для любого $x \in E$.*